

Dr. Ratkó István

Matematikai módszerek orvosi alkalmazásai

A valószínűségszámítás és matematikai statisztika főiskolai oktatásakor a hallgatók néha megkérdezik egy-egy elméleti anyag tárgyalásakor: mire használhatjuk a tanultakat?

Multifaktoriális öröklődésű betegségek

Betegség súlyossága

"Rosszindulatú folyamat" vizsgálata

Betegség, vagy genetikai jellemző meghatározása egyetlen vérvizsgálattal

Egy speciális illeszkedési probléma

Bizonytalan, vagy ismeretlen adatokon alapuló diagnózis

Multifaktoriális öröklődésű betegségek

A multifaktoriális modell szerint - adott rendellenességet vizsgálva - minden egyénhez hozzárendelhető egy ζ valós szám, amit hajlamnak is szoktak nevezni. Ezt a hajlamot a ζ genetikai és az η környezeti hatás együttesen alakítja ki

$$\zeta \approx N(0, h^2), \quad \eta \approx N(0, 1 - h^2).$$

$$h^2$$

az un. örökölhetőségi együttható, az f -ed fokú rokonok korrelációs együtthatója

$$h^2 / 2^f .$$

		Apa beteg		
		Az apának antigénje		
		van		nincs
Fiúnak antigénje	van	0.0976	0.0559	0.0202
	nincs	0.0047		0.0010
Lánynak antigénje	van	0.0273	0.0166	0.0067
	nincs	0.0022		0.0005

		Anya beteg		
		Az anyának antigénje		
		van		nincs
Fiúnak antigénje	van	0.1416	0.0785	0.0293
	nincs	0.0079		0.0012
Lánynak antigénje	van	0.0424	0.0251	0.0104
	nincs	0.0039		0.0010

Betegség súlyossága

Legyen u egy olyan, orvosok által meghatározott érték, amely valamely betegség súlyosságát jellemzi. Két páciens közül az van súlyosabb állapotban, akihez rendelt u érték nagyobb.

Mindegyik páciensnél meghatároztuk (méréssel vagy egyéb módon) k változó értékét.

Legyenek ezek a változók:

$$x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Ezek azok a változók, amelyek - várhatóan - befolyásolják a betegség súlyosságát.

$$v = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k + a_0$$

kifejezésben úgy határozzuk meg az

$$a_0, a_1, \dots, a_k$$

együtthatók értékét, hogy:

- Az

$$r(u, v)$$

korrelációs együttható a lehető legnagyobb legyen.

- Az u változó által meghatározott csoportokban a v változók szignifikánsan különbözzenek egymástól.

Másik megoldás ezen problémára a következő:

Súlyozzuk a jellemzőket. A súlyok megválasztása az orvosokkal történő többszöri megbeszélés után alakul ki. Az ilyen módon kapott eredményeket összevetettük az előbbi módszerrel, s ugyanazt az eredményt kaptuk.

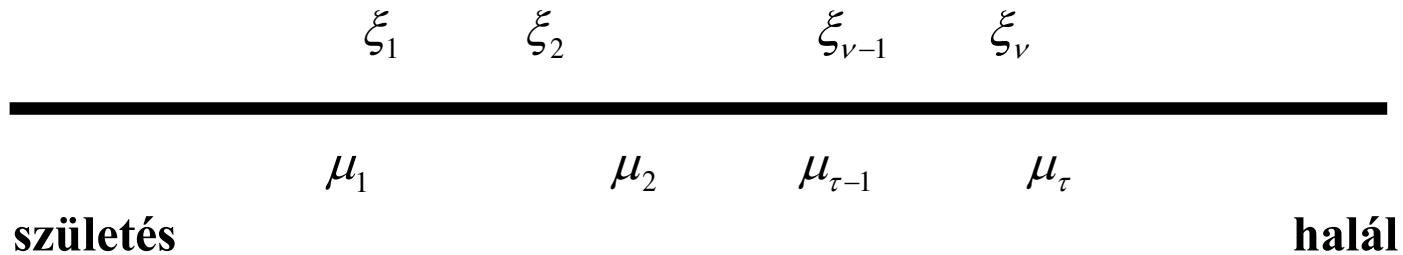
"Rosszindulatú folyamat" vizsgálata

Tegyük fel, hogy egy páciens szervezetében egy rosszindulatú folyamat indul el. n páciens megfigyelésével meghatározható, hogy a szervezet mely egységeiben (milyen szervekben: pl. szív, vese, pajzsmirigy, lép, mellékvese ereiben) indul el a folyamat. A folyamat megjelenése ugyanakkor egy számmal (ún. masszivitással) is jellemezhető. Ha a folyamat megjelenik, akkor lépésről lépésre terjed ez emberi szervezetben, s a folyamat halálhoz vezet.

Az orvos kérdései:

- (i) ha a folyamat gyakrabban van jelen egy szervben, akkor ott korábban kezdődik?

Legyen **A** and **B** két szerv. Jelölje ξ_i illetve μ_i azt az időpillanatot, amikor a folyamat i -edik alkalommal jelenik meg az **A** illetve a **B** szervben.



- (ii) A gyakrabban előforduló struktúra masszívabb?

Betegség, vagy genetikai jellemző meghatározása egyetlen vérvizsgálattal

Léteznek olyan genetikai jellemzők (markerek) és betegségek, amelyek meglétét, vagy hiányát egyetlen vérvizsgálattal meg lehet állapítani. Például a HLA-A2, B27 antigének megléte ankylosing spondylitis ankylopoetica (Bechterew féle betegség) esetén; vagy a HLA-DRw4 antigén megléte juvenilis diabetes , vagy rheumatoid arthritis esetén; vagy a syphilis; AIDS betegségek fennállása; stb

Vezessük be a következő jelöléseket:

N : a páciensek száma

M : antigénnel rendelkezők vagy a betegségben szenvedők száma

a_i

A vérvizsgálat költsége az i -edik genetikai jellemző (betegség) esetében.

p_i

annak valószínűsége, hogy az i -edik vérvizsgálat eredménye pozitív

q_i

$1 - p_i$

Ha minden páciensnél végrehajtjuk a tesztet, akkor az összköltség:

$$N \sum_{i=1}^M a_i$$

Gyűjtsük össze k páciens véréét. Csináljuk meg a tesztet

a. az egybegyűjtött vérrel

b. ha az eredmény pozitív, akkor legalább egy páciens vértesztje pozitív kell, hogy legyen.

Tétel: Jelöljük a költséget ζ -val . Ekkor bizonyítható, hogy

$$E\zeta = \sum_{i=1}^M \{m[k(1 - q_i^k) + 1] + [l(1 - q_i^l) + 1]\} a_i, \text{ ahol } N = mk + l$$

$$E\zeta = f(m, k, l)$$

N-mk-l feltétel

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \sum_{i=1}^M a_i [k(1 - q_i^k) + 1] - \lambda k = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \sum_{i=1}^M a_i [(1 - q_i^l) - l q_i^l \ln q_i] - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \sum_{i=1}^M a_i m [1 - q_i^k - k q_i^k \ln q_i] - \lambda m = 0$$

$$N = mk + l$$

Egy speciális illeszkedési probléma

Adott két betegcsoport, az egyikben n , a másikban N páciens van. $N \gg n$. Minden páciensnek ismert a neme, az életkora, a testsúlya, a testmagassága és néhány egyéb változójának értéke. Célunk a N elemű csoportból kiválasztani n páciensst, akik nemben, életkorban és brokaindexben illeszkednek egymáshoz.

$$\text{BrokaIndex} = \frac{\text{testsúly}(\text{kg})}{\text{testmagasság}^2(\text{méter}^2)}$$

Bizonytalan, vagy ismeretlen adatokon alapuló diagnózis

Adott egy X páciens, akinél néhány változó értéke ismert, néhányé nem ismert. Ugyanakkor adott pácienseknek egy S halmaza, akiknél szintén néhány változó értéke ismert, néhányé nem ismert. Az S halmazban lévő pácienseknél a betegség súlyosságát ismerjük. Cél: meghatározni az X páciens betegségének súlyosságát.

Köszönöm a figyelmet!