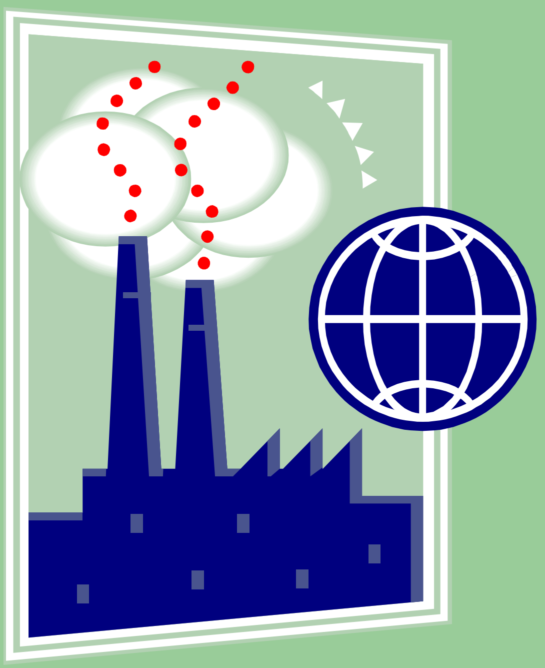
Késleltetett összeszerelő üzemek optimális telepítésének matematikai modellje és egy megoldása Genetikus Algoritmussal



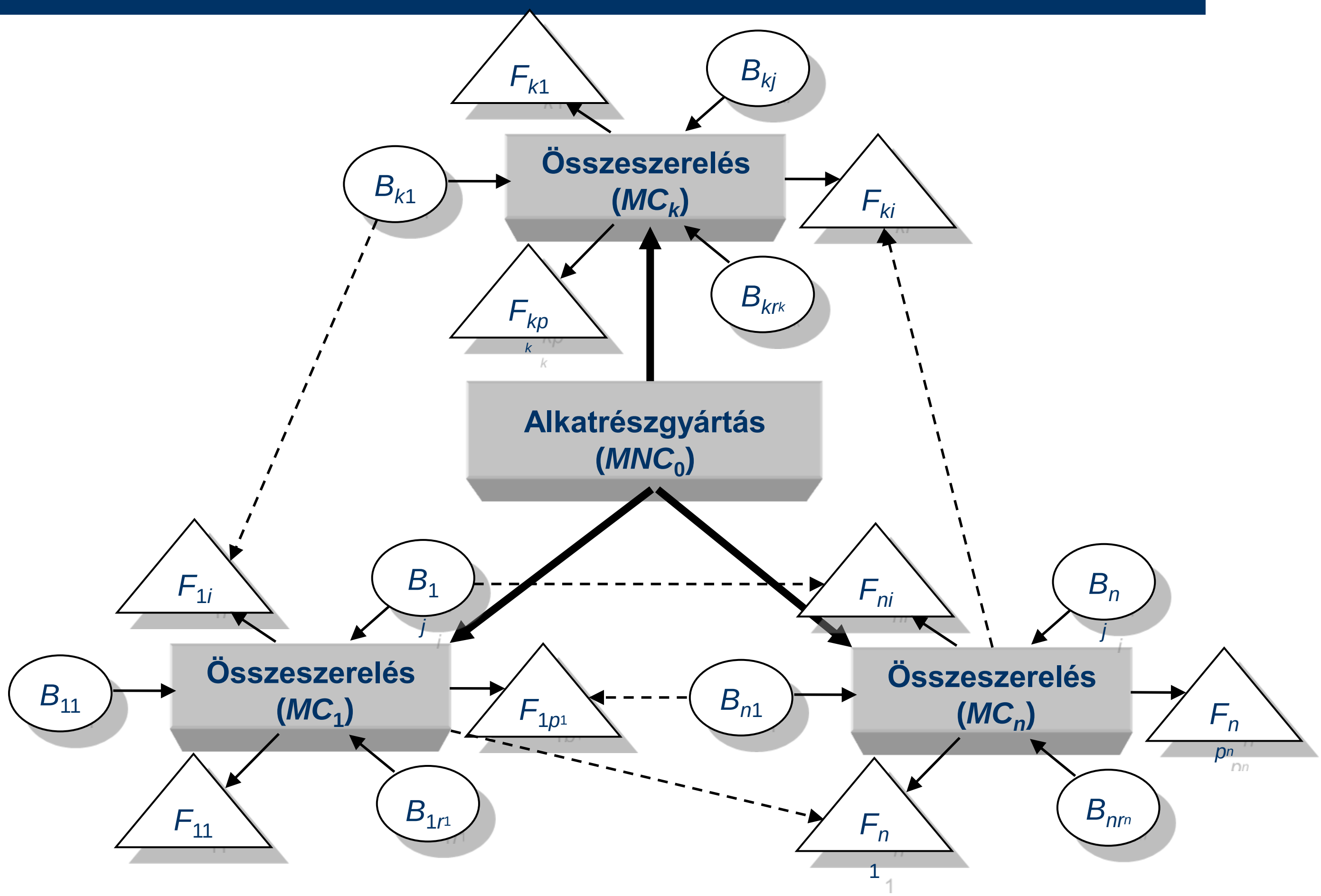
Tudomány Ünnepe
Gábor Dénes Főiskola
2010. november 24.

Dr. Gubán Ákos
Dr. Gubán Miklós

Témakörök

- Az eredeti probléma
  - Telepítési probléma
  - A telepítés matematikai modellje
  - A heurisztikus módszer konvergenciájának igazolása
- Genetikus Algoritmus
  - Az „irányított” Genetikus Algoritmus
  - A konvergencia vizsgálata

A telepítési probléma



A feladat matematikai modellje

$$x_{ki}^{\nu} \geq 0;\ x_{ki}^{\nu} = \mathrm{int}\left(k = 1,\dots n; i = 1,\dots, p_0; \nu = 1,\dots, m\right)$$

$$y_{kj}^{\mu} \geq 0;\ y_{kj}^{\mu} = \mathrm{int}\left(k = 1,\dots n;\ j = 1,\dots, r_0; \mu = 1,\dots, w\right) \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^{\nu} = 1; \left(i = 1,\dots, p_0;\ \nu = 1,\dots, m\right)$$

$$\sum_{j=1}^{r_0} y_{kj}^{\mu} = 1; \left(k = 1,\dots, n; \mu = 1,\dots, w\right) \tag{2}$$

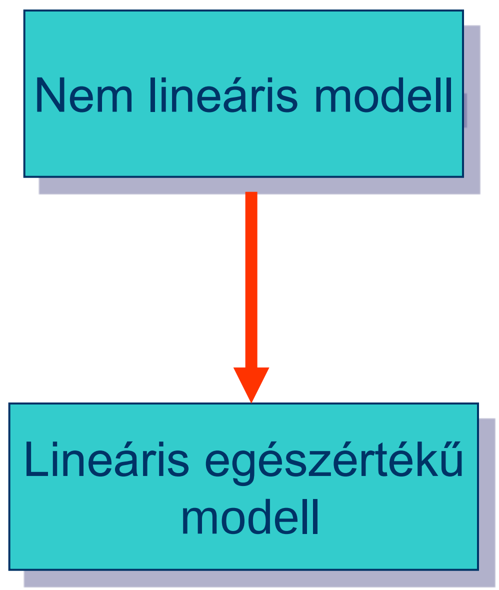
$$\sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} q_{i\nu} \leq c_k^{\nu};\ \left(k = 1,\dots n; \nu = 1,\dots, m\right)$$

$$\sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} q_{i\nu} \geq c^{\nu}; \left(k = 1,\dots n; \nu = 1,\dots, m\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^{\mu} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} d_{i\mu} \leq b_{j\mu};\ \left(j = 1,\dots, r_0; \mu = 1,\dots, w\right) \tag{3}$$

$$K_{red}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} x_{ki}^{\nu} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{\mu=1}^{w} k_{kj\mu\varepsilon}^{AS} \left(\sum_{t=1}^{m} q_{it} a_{t\mu} \right) l'_{kj} y_{kj}^{\mu} + \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(k_{k\nu i}^{BS} c_{ki}^{\nu} l'_{ki} + k_{k\nu}^{M} c_{ki}^{\nu} \right) x_{ki}^{\nu} \to \min \tag{4}$$

A heurisztikus módszer konvergenciájának igazolása



A feladat visszavezetése lineáris egészértékű feladatra

$$y'^{\nu\mu}_{lijk} = x^{\nu}_{li} y^{\mu}_{kj}$$

A helyettesítő képlet

$$\left(k = 1,\dots n;\ i = 1,\dots,p_0;\ j = 1,\dots,r_0;\ l = 1,\dots,n;\ \mu = 1,\dots,w;\ \nu = 1,\dots,m\right)$$

A visszafejtési összefüggés:

$$\sum_{l=1}^{n} y'^{\nu\mu}_{lijk} = y^{\mu}_{kj}\,.$$

Az új modell

$$x_{ki}^{\nu} \geq 0;\; x_{ki}^{\nu} = \operatorname{int}(k = 1,\ldots n; i = 1,\ldots, p_0; \nu = 1,\ldots, m)$$

$$y'^{\nu\mu}_{lijk} \geq 0;\; y'^{\nu\mu}_{lijk} = \operatorname{int}$$

$$(l = 1,\ldots n; k = 1,\ldots n;\; i = 1,\ldots, p_0;\; j = 1,\ldots, r_0;\; \mu = 1,\ldots, w; \nu = 1,\ldots, m)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^{\nu} = 1; (i = 1,\ldots, p_0;\; \nu = 1,\ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{r_0} \sum_{l=1}^{n} y'^{\nu\mu}_{lijk} = 1; (i = 1,\ldots, p_0; k = 1,\ldots, n)$$

$$-x_{li}^{\nu} + \sum_{j=1}^{r_0} y'^{\nu\mu}_{lijk} = 0\;; (l = 1,\ldots, n; k = 1,\ldots, n; i = 1,\ldots p_0; \mu = 1,\ldots, w; \nu = 1,\ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} q_{i\nu} \leq c_k^{\nu};\; (k = 1,\ldots n; \nu = 1,\ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} q_{i\nu} \geq c^{\nu}; (k = 1,\ldots n; \nu = 1,\ldots, m)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i=1}^{p_0} y'^{\mu}_{kijk} d_{i\mu} \leq b_{j\mu}; (j = 1,\ldots, r_0; \mu = 1,\ldots, w)$$

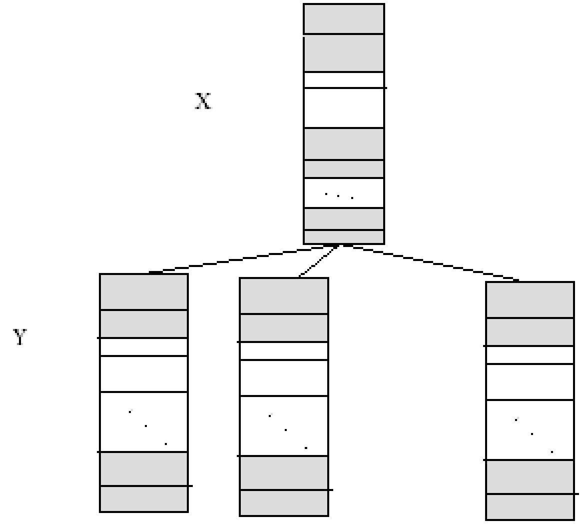
$$\hat{K}_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{y}') = \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{\mu=1}^{w} k_{kj\mu e}^{AS} \left(\sum_{t=1}^{m} q_{it} a_{t\mu} \right) l'_{kj} y'^{\nu\mu}_{kijk} + \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(k_{kvi}^{BS} c_{ki}^{\nu} l'_{ki} + k_{kv}^{M} c_{ki}^{\nu} \right) x_{ki}^{\nu} \to \min$$

Tétel

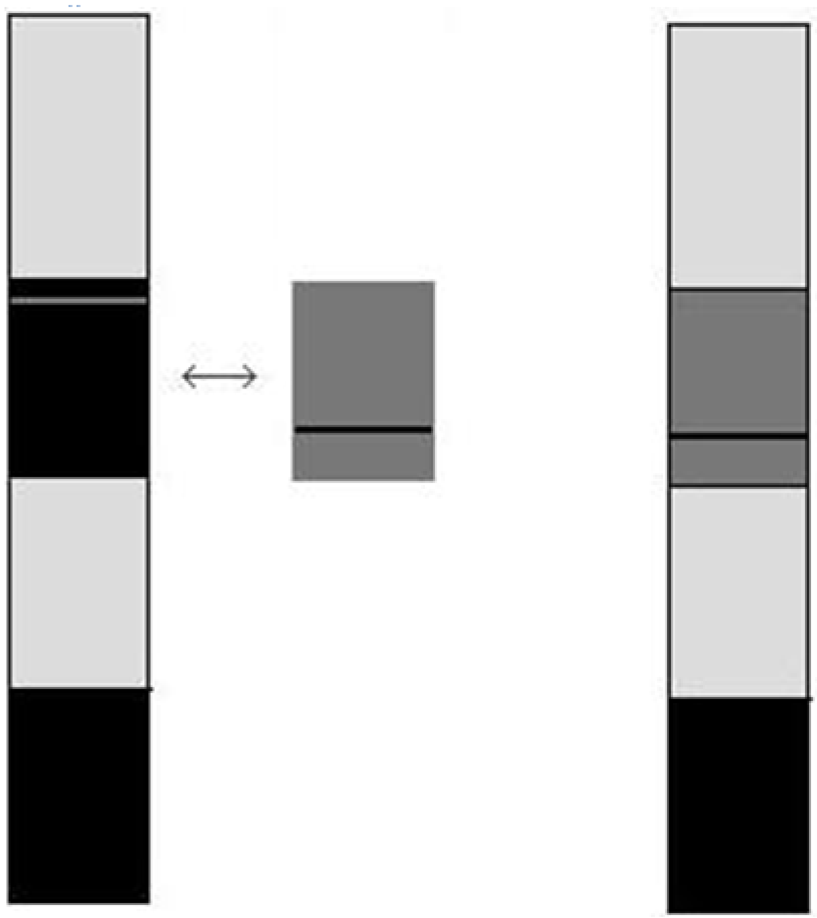
- Az új feladatnak akkor és csak akkor van optimális megoldása, ha az eredeti feladatnak is van optimális megoldása.
- Az egyik optimális megoldásából származtatható a másik feladat optimális megoldása (kölcsönösen egyértelműen).
- A két feladatnak optimális megoldás esetén a célfüggvény értéke ugyanaz lesz.
- Ha a feladatnak van lehetséges megoldása, akkor van optimuma is.

Az „irányított” Genetikus Algoritmus

- A feladat megoldásához egy kromoszóma rendszert konstruálunk.
- A kromoszóma *X* és *Y* ágakból áll egy *X*-hez *W* db *Y* ág csatlakozik.



X kromoszómarész mutálása



Y kromoszómarész mutációja

A korábbi kromoszómaállapot beszállítói közül egyet (vagy többet) kiveszünk a régi helyről
Legyen $\mathrm{V} = t_k$

a) Válasszunk véletlenszerűen az $\mathbf{Y}$ mátrix *i*-edik sorából egy olyan elemet (beszállítót), mely 0-tól különbözik (legyen *l*). Két eset van:

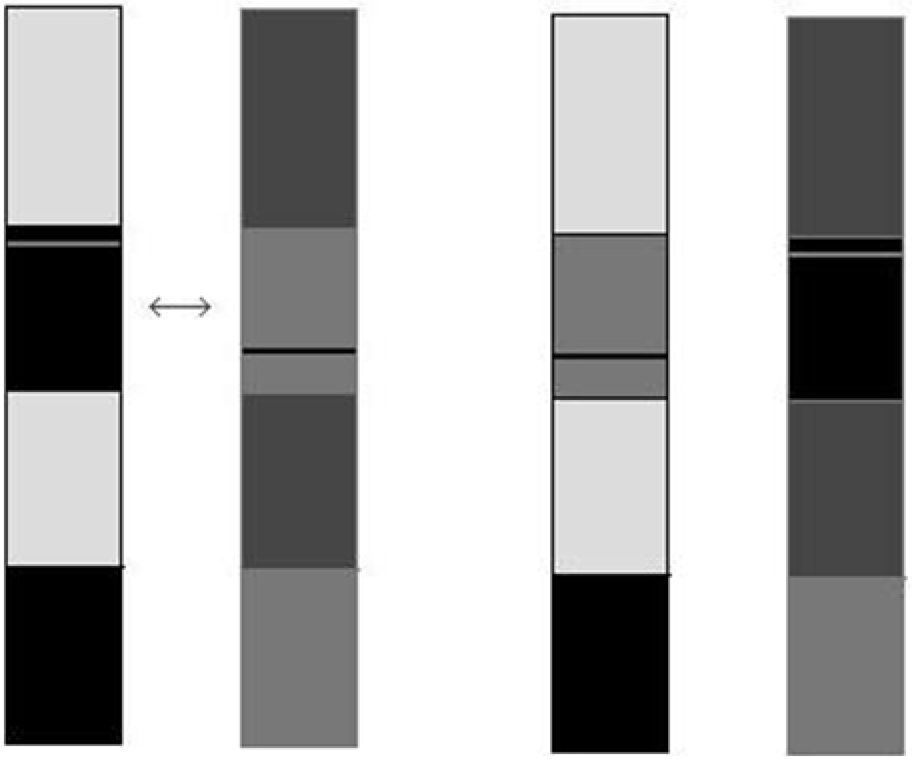
$y_{ilw} \geq V$, ekkor $y_{ilw} := y_{ilw} - V$ és $m_{lw} := m_{lw} + V$
$y_{ilw} < V$, ekkor $m_{lw} := m_{lw} + y_{ilw}, V := V - y_{ilw},\ y_{ilw} := 0$ és lépjünk vissza a) ponthoz. Ez biztos véget ér.

Az új helyre beteszünk új beszállító(ka)t
Legyen $\mathrm{V} = t_k$

b) Ezután véletlenszerűen válasszunk ki egy l beszállítót az $\mathbf{M}$ vektor alapján (azaz ahol az $m_l >$ 0). Két eset van:

$m_{lw} \geq V$, ekkor $y_{jlw} := y_{jlw} + V$ és $m_{lw} := m_{lw} - V$
$m_{lw} < V$, ekkor $y_{jlw} := y_{jlw} + m_{lw}, m_{lw} := 0$ és $V := V - y_{jlw}$. Ezután folytassuk b) ponttól.

X kromoszómarész keresztezése



Y kromoszómarész keresztezése

Vonjunk le a $\mathbf{r}^w$ vektor *i*-edik sorából t_k-t és adjunk ugyanennyit a *j*-edik sorhoz. Legyen $V = t_k$

a) Válasszunk véletlenszerűen az $\mathbf{Y}$ mátrix *i*-edik sorából egy olyan elemet, mely 0-tól különbözik (legyen *l*). Két eset van:

$y_{ilw} \geq V$, ekkor $y_{ilw} := y_{ilw} - V$ és $y_{jlw} := y_{jlw} + V$ és vége.

Ha

$y_{ilw} < V$, ekkor $y_{jlw} := y_{jlw} + y_{ilw}$, $V := V - y_{il}$, $y_{ilw} := 0$ és lépjünk vissza a) ponthoz. Ez biztos véget ér.

A mintafeladat

- 1 termék. A termékbe két darab alkatrész épül be
  - 10, 6 db fajlagosan
- 4 felhasználó igényeik: 5, 7, 8, 10 db termék
- 5 beszállító
  - Gyártókapacitások:100, 20, 200, 50, 300 db 1. alkatrész
  - Gyártókapacitások:300, 200, 70, 100, 20 db 2. alkatrész
- Az összeszerelő üzemek maximális száma: 10
- Az összeszerelő üzemek kapacitásai
  - Minimum: 100 db
  - Maximum: 120 db
- A telepítés költsége 1000

A mintafeladat távolságadatai az összeszerelő üzemek függvényében

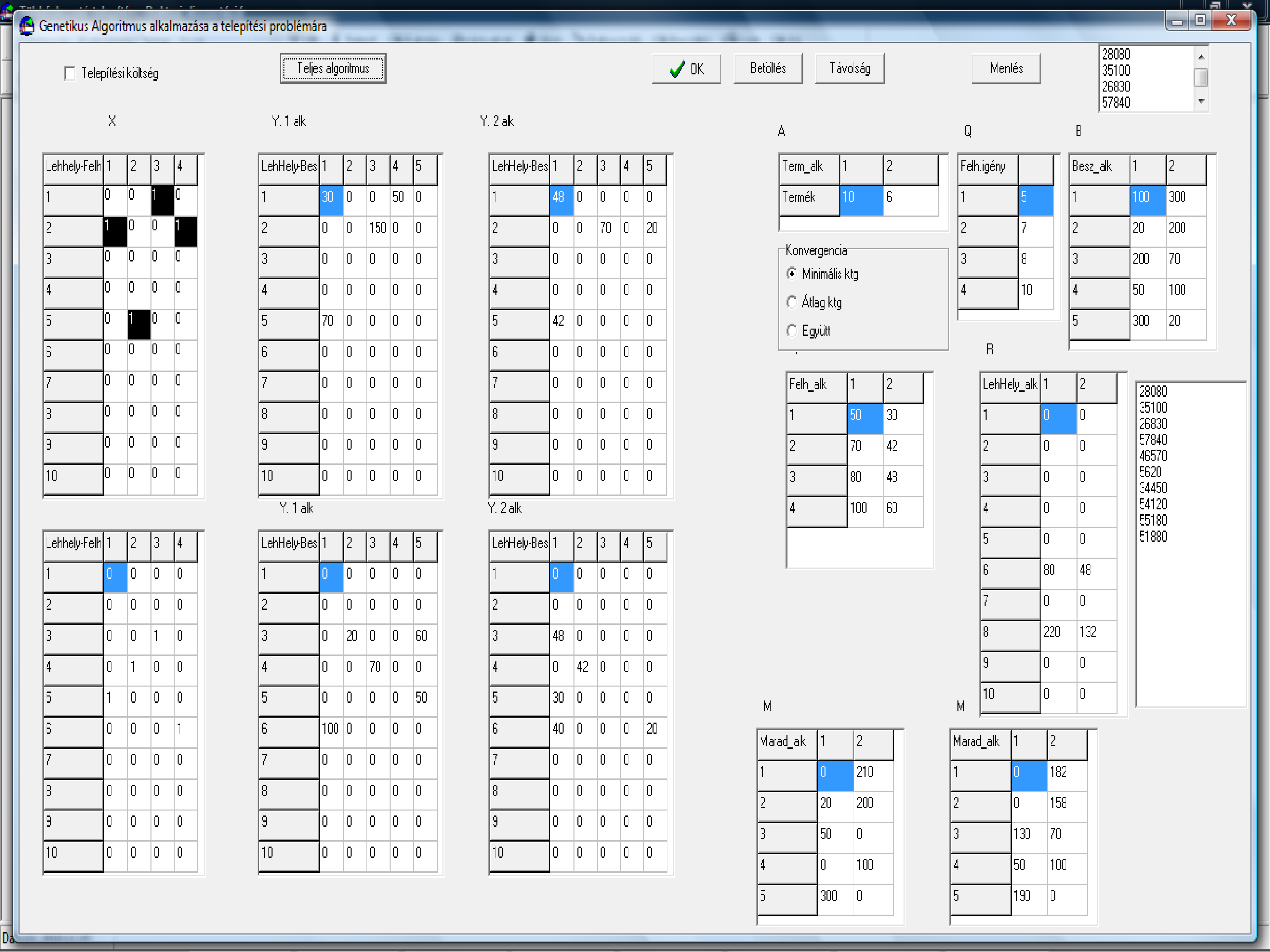
	F1	F2	F3	F4	B1	B2	B3	B4	B5
L1	100	30	20	200	10	300	40	10	50
L2	30	200	100	10	30	400	10	30	20
L3	400	10	30	20	100	50	100	40	200
L4	100	20	300	30	50	60	100	300	10
L5	200	30	100	200	10	30	50	40	10
L6	10	30	60	20	10	60	90	100	200
L7	100	20	300	400	50	100	400	10	30
L8	100	30	20	400	10	20	300	10	200
L9	100	300	10	30	60	100	20	300	10
L10	20	30	100	400	20	30	80	100	20

A program bemutatása

- A Genetikus Algoritmus indítása

Telepítési költség nélkül

- A futtatás eredménye


Genetikus Algoritmus alkalmazása a telepítési problémára
Telepítési költség
Teljes algoritmus
OK
Betöltés
Távolság
Mentés
28080
35100
26830
57840
X
Lehhely-Felh 1 2 3 4
1 0 0 1 0
2 1 0 0 1
3 0 0 0 0
4 0 0 0 0
5 0 1 0 0
6 0 0 0 0
7 0 0 0 0
8 0 0 0 0
9 0 0 0 0
10 0 0 0 0
Y. 1 alk
LehHely-Bes 1 2 3 4 5
1 30 0 0 50 0
2 0 0 150 0 0
3 0 0 0 0 0
4 0 0 0 0 0
5 70 0 0 0 0
6 0 0 0 0 0
7 0 0 0 0 0
8 0 0 0 0 0
9 0 0 0 0 0
10 0 0 0 0 0
Y. 2 alk
LehHely-Bes 1 2 3 4 5
1 48 0 0 0 0
2 0 0 70 0 20
3 0 0 0 0 0
4 0 0 0 0 0
5 42 0 0 0 0
6 0 0 0 0 0
7 0 0 0 0 0
8 0 0 0 0 0
9 0 0 0 0 0
10 0 0 0 0 0
A
Term_alk 1 2
Termék 10 6
Q
Felh.igény
1 5
2 7
3 8
4 10
B
Besz_alk 1 2
1 100 300
2 20 200
3 200 70
4 50 100
5 300 20
Konvergencia
Minimális ktg
Átlag ktg
Együtt
Felh_alk 1 2
1 50 30
2 70 42
3 80 48
4 100 60
R
LehHely_alk 1 2
1 0 0
2 0 0
3 0 0
4 0 0
5 0 0
6 80 48
7 0 0
8 220 132
9 0 0
10 0 0
28080
35100
26830
57840
46570
5620
34450
54120
55180
51880
Lehhely-Felh 1 2 3 4
1 0 0 0 0
2 0 0 0 0
3 0 0 1 0
4 0 1 0 0
5 1 0 0 0
6 0 0 0 1
7 0 0 0 0
8 0 0 0 0
9 0 0 0 0
10 0 0 0 0
Y. 1 alk
LehHely-Bes 1 2 3 4 5
1 0 0 0 0 0
2 0 0 0 0 0
3 0 20 0 0 60
4 0 0 70 0 0
5 0 0 0 0 50
6 100 0 0 0 0
7 0 0 0 0 0
8 0 0 0 0 0
9 0 0 0 0 0
10 0 0 0 0 0
Y. 2 alk
LehHely-Bes 1 2 3 4 5
1 0 0 0 0 0
2 0 0 0 0 0
3 48 0 0 0 0
4 0 42 0 0 0
5 30 0 0 0 0
6 40 0 0 0 20
7 0 0 0 0 0
8 0 0 0 0 0
9 0 0 0 0 0
10 0 0 0 0 0
M
Marad_alk 1 2
1 0 210
2 20 200
3 50 0
4 0 100
5 300 0
M
Marad_alk 1 2
1 0 182
2 0 158
3 130 70
4 50 100
5 190 0

Telepítési költség hozzáadása

- A telepítési költség a teljes költség ötöde lesz

Genetikus Algoritmus alkalmazása a telepítési problémára

☑ Telepítési költség

Teljes algoritmus | OK | Betöltés | Távolság | Mentés

46590
24420
22600
22510

X

Lehhely-Felh	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	1	1	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0

Y. 1 alk

LehHely-Bes	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	150	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	150
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0

Y. 2 alk

LehHely-Bes	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	70	0	20
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	90	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0

A

Term_alk	1	2
Termék	10	6

Q

Felh.igény	
1	5
2	7
3	8
4	10

B

Besz_alk	1	2
1	100	300
2	20	200
3	200	70
4	50	100
5	300	20

Konvergencia

- (•) Minimális ktg
- ( ) Átlag ktg
- ( ) Együtt

Felh_alk	1	2
1	50	30
2	70	42
3	80	48
4	100	60

R

LehHely_alk	1	2
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	80	48
7	0	0
8	220	132
9	0	0
10	0	0

46590
35340
29340
22510
78430
52950
20790
31450
8260
31940

Y. 1 alk

Lehhely-Felh	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	1	0	0
5	0	0	0	1
6	0	0	0	0
7	0	0	1	0
8	1	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0

LehHely-Bes	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	70
5	0	20	80	0	0
6	0	0	0	0	0
7	80	0	0	0	0
8	0	0	0	50	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0

Y. 2 alk

LehHely-Bes	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	42	0	0
5	60	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	28	20	0
8	30	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0

M

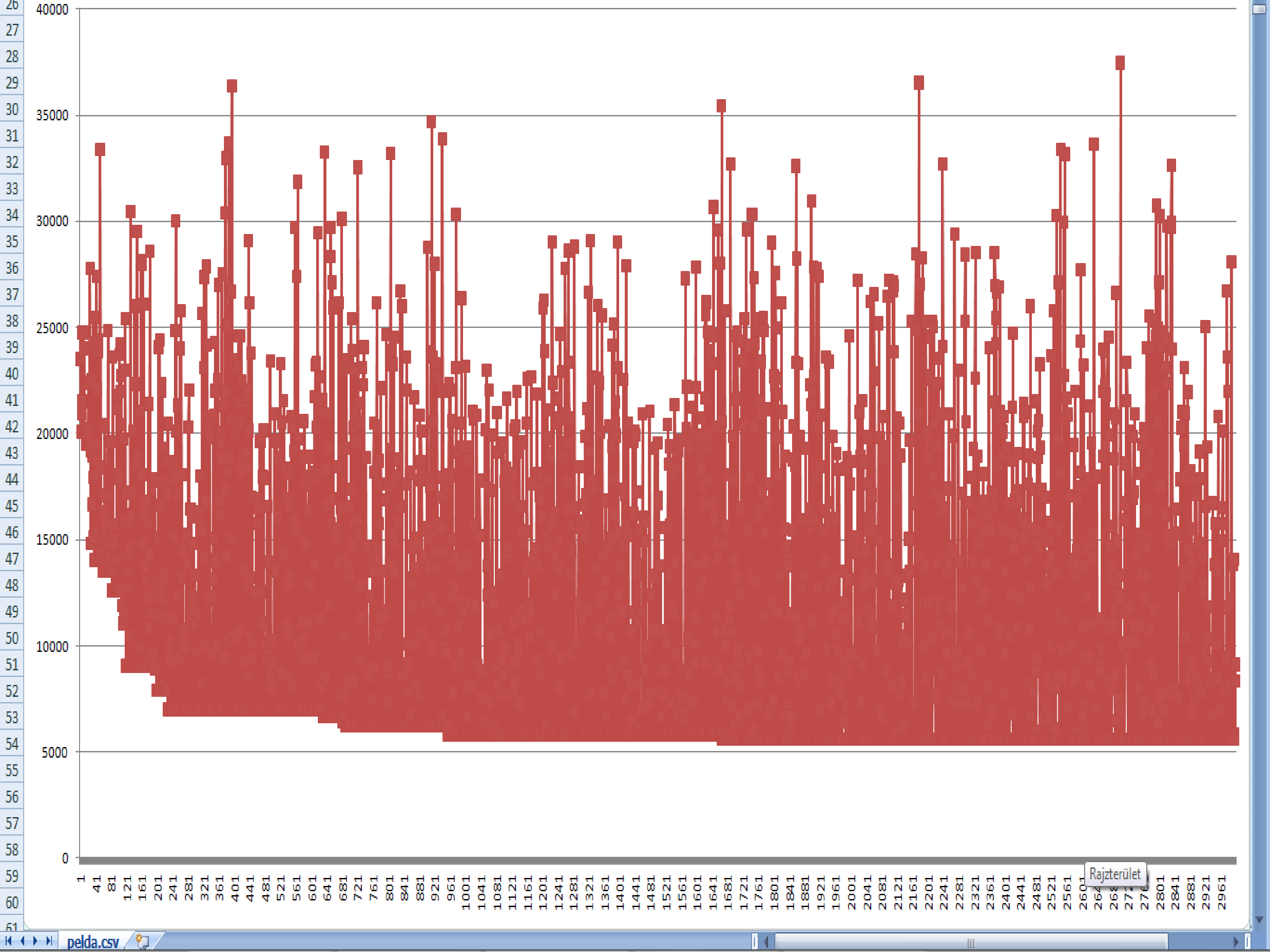
Marad_alk	1	2
1	100	210
2	20	200
3	50	0
4	50	100
5	150	0

M

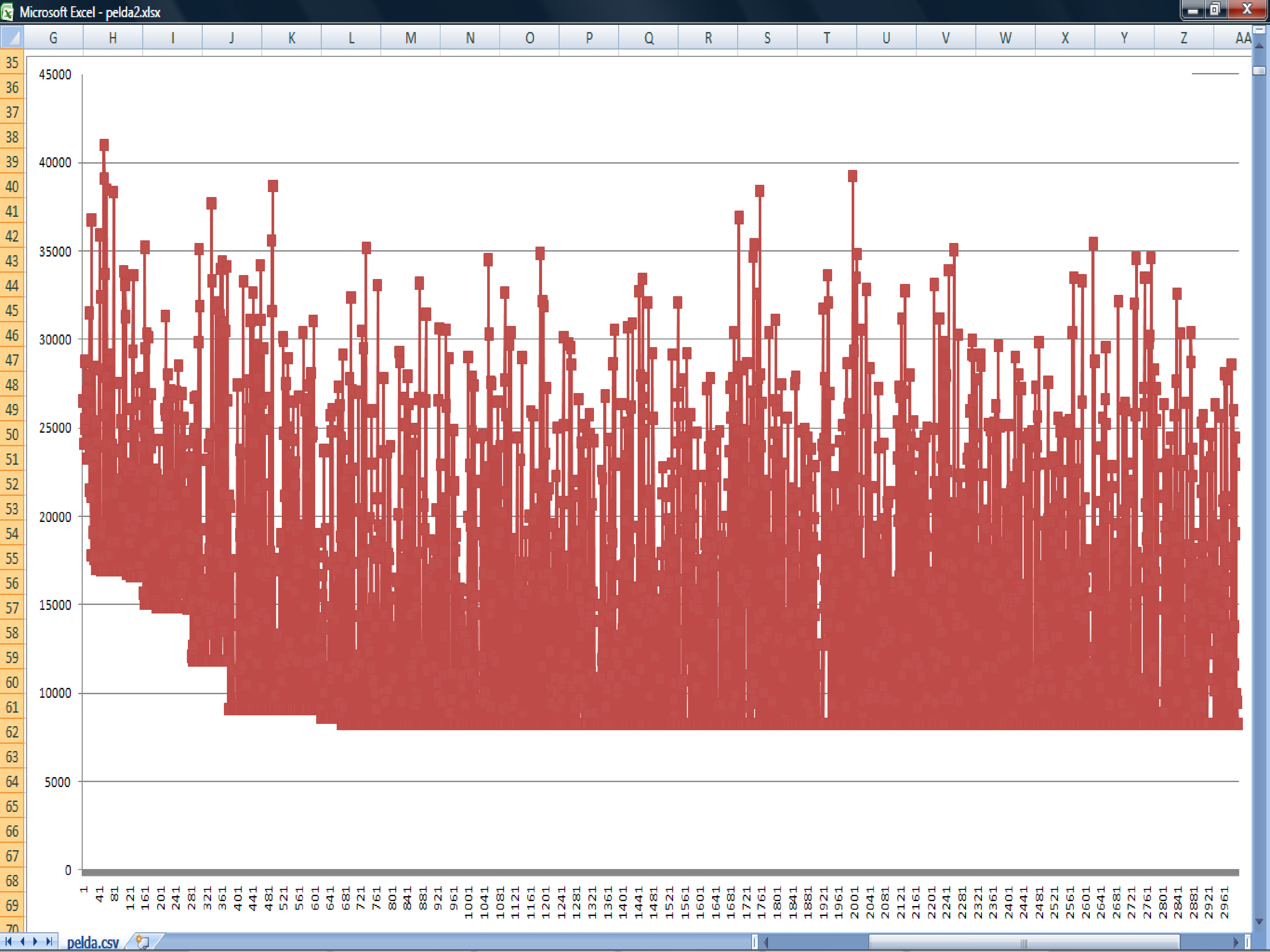
Marad_alk	1	2
1	20	210
2	0	200
3	120	0
4	0	80
5	230	20

Az algoritmus konvergenciája

- Telepítési költség nélkül
- Telepítési költséggel



40000
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
1
41
81
121
161
201
241
281
321
361
401
441
481
521
561
601
641
681
721
761
801
841
881
921
961
1001
1041
1081
1121
1161
1201
1241
1281
1321
1361
1401
1441
1481
1521
1561
1601
1641
1681
1721
1761
1801
1841
1881
1921
1961
2001
2041
2081
2121
2161
2201
2241
2281
2321
2361
2401
2441
2481
2521
2561
2801
2841
2881
2921
2961
Rajzterület
pelda.csv


Microsoft Excel - pelda2.xlsx
G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z AA
45000
40000
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
1 41 81 121 161 201 241 281 321 361 401 441 481 521 561 601 641 681 721 761 801 841 881 921 961 1001 1041 1081 1121 1161 1201 1241 1281 1321 1361 1401 1441 1481 1521 1561 1601 1641 1681 1721 1761 1801 1841 1881 1921 1961 2001 2041 2081 2121 2161 2201 2241 2281 2321 2361 2401 2441 2481 2521 2561 2601 2641 2681 2721 2761 2801 2841 2881 2921 2961
pelda.csv

Összefoglalás

- A feladatnak nem lineáris programozási modellje ☹ van.
- A feladathoz megadható egy egészértékű lineáris programozási modell. ☺
- Ehhez már vannak egzakt megoldási módszerek és igazolható a korábbi heurisztikus módszer konvergenciája ☺
- Az „irányított” Genetikus Algoritmus hatékony eszköz a feladat megoldására ☺
- A leállítási feltétel eléggé bonyolult ☹

Köszönöm a figyelmet!